Arhitectura calculatoarelor

Laboratorul 2.

2.1. Reprezentări numerice în virgulă mobilă

Reprezentarea în virgulă mobilă se folosește pentru numere reale, care pot avea valori în limite mult mai largi decât cele întregi. Ea este o reprezentare binară, adaptată pentru calculator, a așa numitei reprezentări științifice. Ca exemplu, reprezentarea științifică a numărului -267.133 este -2.67133E+2 corespunzând numărului $-2.67133 * 10^2$, iar a numărului 0.00017 este +1.7E-4 corespunzând numărului $-1.7 * 10^{-4}$.

Reprezentarea cuprinde următoarele elemente:

- baza (a cărei valoare subînțeleasă este aici 10);
- mantisa (2.67133);
- semnul mantisei (minus);
- exponentul (2);
- semnul exponentului (plus).

După cum se poate remarca, am folosit convenția de separare a părții întregi a numărului de partea sa fracționară prin caracterul „punct”. Mantisa este un număr fracționar și este normalizată, în sensul că partea întreagă este nenulă și este mai mică decât baza, deci are o singură cifră semnificativă. Dacă, în urma unui calcul, rezultă o mantisă nenormalizată, atunci trebuie făcută normalizarea acesteia, prin deplasarea punctului zecimal la stânga sau la dreapta, concomitent cu ajustarea corespunzătoare a exponentului. Exponentul este un număr întreg, cu semn.

2.2. Reprezentarea în standardul IEEE 754

Reprezentarea internă, în calculatoare, a numerelor în virgulă mobilă este reglementată prin standardul IEEE 754. Sunt precizate două lungimi de reprezentare: simplă precizie, pe 32 de biți și dublă precizie, pe 64 de biți. Baza este implicit 2. Semnul mantisei, S, se reprezintă pe un bit cu convenția 0 pentru plus, 1 pentru minus.

31	30 23	22 0
S	C	M

63	62 52	51 0
S	C	M

Mantisa (în limba engleză *mantissa* sau *significand*) este normalizată în baza doi, cu un bit în partea întreagă și 23, respectiv 52 de biți în partea fracționară. Specific operației de normalizare în baza 2 este faptul că partea întreagă are întotdeauna valoarea 1. Din acest motiv reprezentarea acestui bit este redundantă. El nu se reprezintă și poartă numele de bit implicit sau bit ascuns. Așadar, câmpul M conține doar partea fracționară a mantisei. Valoarea adevărată a mantisei este 1.M. Putem considera că bitul este ascuns, sau acoperit, de bitul cel mai din dreapta al câmpului C.

Valoarea exponentului și semnul său sunt exprimate prin câmpul C, numit caracteristică sau exponent translatat (în limba engleză *characteristic* sau *biased exponent*). Dacă se alocă n biți pentru caracteristică atunci C = E + ($2^{n-1} - 1$). În simplă precizie n = 8. Rezultă că pentru C = 0, E = -127, pentru C = 127, E = 0, pentru C = 255, E = 128. În dublă precizie pentru C = 0, E = -1023, pentru C = 1023, E = 0, iar pentru C = 2045, E = 1024.

Această reprezentare este similară reprezentărilor în cod complementar, în raport cu cele de tip semn-mărime și are avantajul că caracteristicile a două numere pot fi comparate, adunate sau scăzute printr-o singură operație. În concluzie, numărul corespunzător unei reprezentări în simplă precizie este:

$$x = (-1)^S * 1.M * 2^{C-127}$$

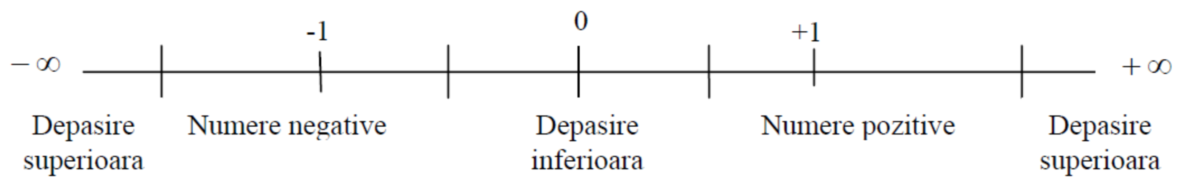
Iar în dublă precizie:

$$x = (-1)^S * 1.M * 2^{C-1023}$$

2.3. Domeniile de reprezentare în standardul IEEE 754

2.3.1. Valori reprezentabile

Trasând axa reală și marcând pe ea zonele în care se pot reprezenta numere conform regulilor expuse mai sus, putem observa câteva puncte de reper.



Numerele reprezentabile se află în două intervale simetrice, cuprinzând atât valori supraunitare cât şi subunitare. Simetria este valabilă pentru orice reprezentare IEEE 754 și rezultă din modul în care se reprezintă semnul, anume ca bit independent.

Prin *depășire superioară* înțelegem situația în care, în urma unui calcul, rezultatul are o valoare a exponentului care depășește valoarea maximă, pozitivă, reprezentabilă pe numărul de biți alocat prin standard.

Prin *depășire inferioară* înțelegem situația în care, în urma unui calcul, rezultatul are o valoare a exponentului care depășește valoarea minimă, negativă, reprezentabilă pe numărul de biți alocat prin standard.

2.3.2. Cazuri speciale

Numărul zero

Convenția de normalizare a mantisei pleacă de la prezumpția că mantisa are cel puțin o cifră semnificativă. Acest lucru nu este adevărat pentru numărul zero. În standardul IEEE 754 numărul zero se reprezintă în forma 00…0. Aceasta este o derogare de la convenția prezentată în paragraful anterior. Conform acestei convenții 00…0 ar fi reprezentat, după adăugarea bitului implicit, numărul 2-127 , iar numărul zero ar fi fost nereprezentabil.

Datorită simetriei, există o reprezentare validă și pentru numărul -0, sub forma binară 100...000. Operația de comparație între operanzii +0 și -0 este implementată astfel încât să dea un rezultat de egalitate. Ca rezultat al unei operații, zero apare întotdeauna în forma pozitivă, cea negativă poate apărea doar fiind introdusă din afară.

Alte cazuri speciale

Acestea apar în situații precum cele de mai jos:

Operația	Rezultat
n ÷ ±Infinit	0
±Infinit × ±Infinit	±Infinit
nonzero ÷ 0	±Infinit
Infinit + Infinit	Infinit
±0 ÷ ±0	NaN
Infinit - Infinit	NaN
±Infinit ÷ ±Infinit	NaN
±Infinit × 0	NaN

Valorile +infinit și –infinit au reprezentări definite și distincte. Acesta capacitate a standardului permite propagarea acestor valori prin operațiile de calcul, cu semnalarea corespunzătoare a situațiilor de depășire superioară sau inferioară, dar fără a genera excepții (întreruperi software).

Acronimul NaN (*Not a Number*), se referă la un set de coduri binare care nu reprezintă numere reale, deoarece apar în urma unor operații al căror rezultat este indefinit din punct de vedere matematic. Standardul definește două categorii de NaN, anume:

- QNaN (*Quiet Nan*). Semantic, un QNaN semnifică o operație cu rezultat nedeterminat. Un astfel de rezultat se va propaga liber prin majoritatea operațiilor aritmetice.
- SNaN (*Signaling Nan*). Un SNaN apare ca rezultat al unei operații invalide, cum ar fi, de exemplu, radical dintr-o valoare negativă sau tangentă de $\pi / 2$. Apariția unui SNaN are ca efect generarea de către unitatea de calcul în virgulă mobilă a unei excepții (întrerupere internă), prin care să se apeleze la o procedură software de tratare a situației, procedură ce va fi definită de către utilizator.

În tabela următoare se prezintă sumarul codificărilor conform standardului IEEE754.

S	C	M	Valoare
0	00..00	00..00	+0
0	00..00	00..01 : 11..11	Număr real pozitiv denormalizat
0	00..01 : 11..10	XX..XX	Număr real pozitiv normalizat
0	11..11	00..00	+Infinit
0	11..11	00..01 : 11..11	SNaN
0	11..11	10..00 : 11..11	QNaN
1	00..00	00..00	-0
1	00..00	00..01 : 11..11	Număr real negativ denormalizat
1	00..01 : 11..10	XX..XX	Număr real negativ normalizat
1	11..11	00..00	-Infinit
1	11..11	00..01 : 11..11	SNaN
1	11..11	10..00 : 11..11	QNaN

Valoarea unui număr real normalizat este dată de formula:

$$x = (-1)^s * 1.M * 2^{C-b}$$

Unde prin *b* (*bias*) s-a notat offset-ul caracteristicii fată de exponent, cu valoarea de 127, respectiv 1023 în simplă, respectiv în dublă precizie.

Se poate remarca faptul că toate codurile posibile care au valoarea 00…0 sau 11…1 în câmpul C au interpretări speciale. Unele dintre acestea sunt rezervate pentru zero, infinit și NaN, iar celelalte sunt disponibile pentru a reprezenta numere nenormalizate. Valoarea unui număr real nenormalizat este dată de formula:

$$x = (-1)^s * 1.M * \ 2^{1-b}$$

Aceste valori pot apărea și pot fi utilizate doar în calcule intermediare.

2.4. Caracterul aproximativ al reprezentării în virgulă mobilă

Așa cum s-a arătat, aceasta este o reprezentare dedicată pentru numerele reale. În sens matematic, mulțimea numerelor reale este continuă și infinită. Dar mantisa are un număr finit de biți. Aceasta înseamnă că doar un număr finit de puncte de pe axa numerelor reale sunt reprezentabile.

Granularitatea reprezentării crește odată cu valoarea absolută a numerelor, în funcție de valoarea exponentului. Între 1 și 2 se pot reprezenta 2^{23}, sau 2^{52} numere, în simplă precizie, respectiv în dublă precizie, la fel ca și între 1/16 și 1/8 sau între 1024 și 2048. Acest aspect poate fi considerat ca un avantaj, întrucât corespunde necesității de a surprinde corect fenomenele fizice reale. Putem opera atât la nivel microscopic, cât și la nivel macroscopic, cu păstrarea constantă a erorii relative a unei operații.

În mod normal rezultatul unei operații aritmetice între două numere, având fiecare o mantisă de 24 de biți, este un număr a cărui mantisă are mai mult de 24 de biți. Acest număr, nereprezentabil, se aproximează la unul reprezentabil, fie prin trunchiere fie prin rotunjire. Situația este normală și nu trebuie confundată cu depășirea exponentului, care duce la rezultate nereprezentabile. Trunchierea se face prin ignorarea biților nereprezentabili. Rotunjirea se face prin aproximare la una dintre cele două valori reprezentabile care încadrează rezultatul, fie către plus infinit, fie către minus infinit.

2.5. Exerciții

1. Să se reprezinte conform standardului IEEE 754, simplă precizie, următoarele valori: 43.75; -123.375; 2^{59}; $\frac{5}{192}$.
2. Să se calculeze care este valoare în baza 10 a următoarelor șabloane de biți, reprezentate conform IEEE 754, simplă precizie:
   0100 0001 1111 0000 0000 0000 0000 0000;
   1100 0101 1000 0000 0000 0000 0000 0000;
   43700000H;
   C1E00000H.
3. Să se determine cel mai mic număr pozitiv și cel mai mare număr pozitiv ce pot fi reprezentate. Să se reprezinte aceste numere în standard IEEE 754 în formă binară și în formă hexazecimală.